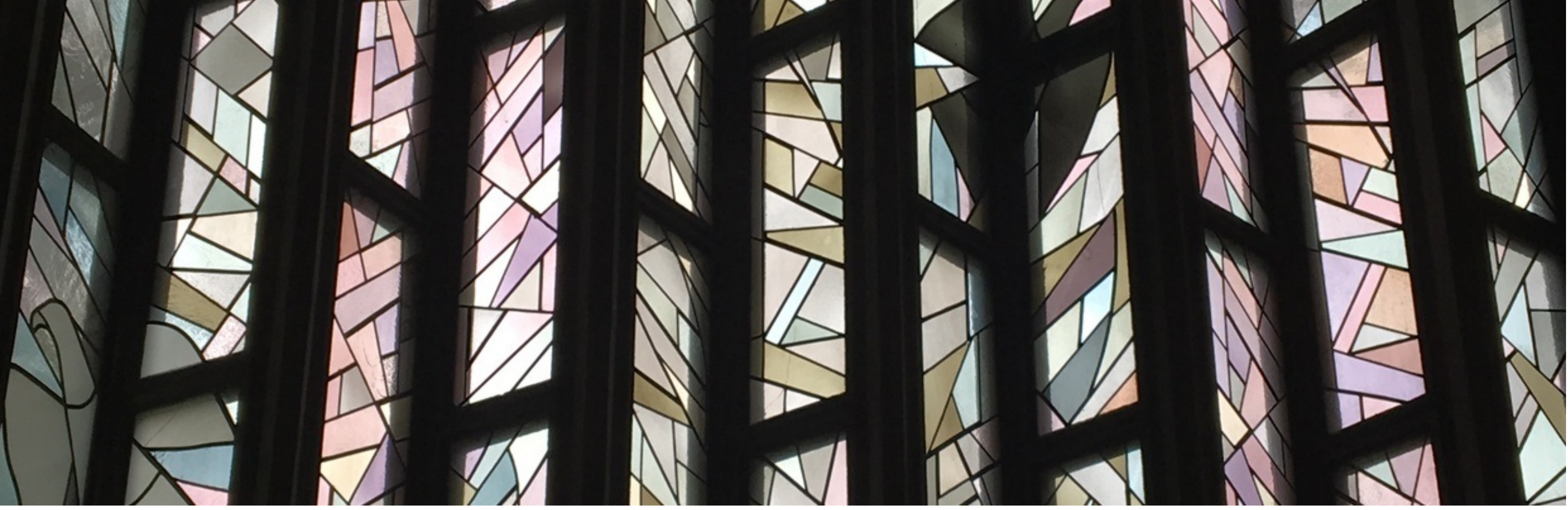


Die Zähmung des Zufalls (The Taming of Chance)

Authors: Manuela Lenzen, Michael Röckner

Submitted: 23. May 2016
Published: 23. May 2016
Volume: 3
Issue: 3
Keywords: chance, probability theory, mathematical physics, stochastic analysis, modelling, stochastic dynamics, Physics, Biology, Economics
DOI: 10.17160/josha.3.3.192

JOSHA
josha.org

Journal of Science, Humanities and Arts

MICHAEL RÖCKNER (Bielefeld)

Von der Zähmung des Zufalls

Michael Röckner ist Professor für Mathematik an der Universität Bielefeld und Vizepräsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV). Seine Arbeitsschwerpunkte sind Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematische Physik und stochastische Analysis, vor allem die Modellierung und Analyse stochastischer Dynamiken in Physik, Biologie und Ökonomie. Seit Oktober ist er geschäftsführender Direktor des ZiF. Mit Manuela Lenzen sprach er über die wundersame Welt des Zufalls, Statistik im Schulunterricht und gute Gründe, auch randständige Forschungsthemen zu fördern.

Herr Röckner, ist der Zufall für einen Mathematiker nicht ein besonderes Ärgernis?

Der Zufall ist eine besondere Herausforderung, würde ich sagen. Alles ist irgendwie vom Zufall beeinflusst. Es gibt nichts, was man deterministisch klar voraussagen könnte. Ein einfaches Beispiel: Man nimmt eine Porzellanvase und stößt sie auf die Erde, mehrmals hintereinander. Man versucht, alles genau gleich zu machen, stellt die Vasen an die gleiche Stelle, und man lässt sie von einem Roboter in ›exakt‹ gleicher Weise anstoßen, immer mit der gleichen Kraft. Und es wird immer wieder eine völlig andere Verteilung der Scherben auf dem Boden geben. Zum einen, weil es immer Einflüsse gibt, die man nicht im Griff hat, vielleicht einen Luftzug. Und dann, weil man auch die aufgewandte Kraft gar nicht genau genug messen kann. Ein anderes Beispiel: Wenn man, wie vor 200 Jahren der schottische Botaniker Brown, ein Pollenteilchen in eine Flüssigkeit gibt, dann ist dieses dauernden Stößen der vielen Billionen Moleküle der Flüssigkeit ausgesetzt. Die sich ergebende ›wild zappelnde‹ Bewegung des Pollenteilchens, die Brownsche Bewegung, kann man dann nicht mehr deterministisch, sondern nur wahrscheinlichkeitstheoretisch beschreiben. Oder wenn man den Wechsel von Warm- und Kaltzeiten in der Geschichte der Erde betrachtet. Da gibt es langfristige Einflüsse wie die Bewegungen der Planeten und kurzfristige wie Vulkanausbrüche. Und es kann sein, dass diese Geschehnisse auf der viel kleineren Zeitskala dazu führen, dass das System von einem Zustand in den anderen wechselt. Wenn ein solcher Zufall ein System von einem Zustand in einen anderen ›hinüberschießt‹ und dann eventuell wieder zurück, nennt man das stochastische Resonanz. Und dieses Phänomen kann starken Einfluss darauf haben, wie sich große Systeme entwickeln.

Die Genauigkeit der Mathematik, die etwa den Punkt auf einer Strecke kennt, der keine Länge hat, die kommt in der Natur so nicht vor, es handelt sich hier um eine mathematische Idealisierung. Darum gibt es immer eine Ungenauigkeit und die subsumiert man unter Zufall. Also, wir können den Zufall nicht vermeiden, aber wir können versuchen, ihn in den Griff zu bekommen. Durch die Stochastik.

Da gibt es kein kleines ungenaues Epsilon

Die Stochastik ist eine recht junge Disziplin. Wenn der Zufall so zentral ist, warum wird sie erst jetzt so wichtig?

Erste einfache wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen gehen bis in die Antike zurück. Dass die Stochastik jetzt so zentral ist, liegt daran, dass die Messungen immer genauer werden. Es gibt physikalische Theorien, die in einem gewissen Bereich stimmen, aber wenn man genauer hinschaut, gibt es Bereiche, wo man feststellt, dass man immer noch keine hundertprozentigen Voraussagen machen kann. Im Hochenergiebereich etwa kommen relativistische Effekte hinein, die man bei Niedrigenergie nicht hat. Man kann natürlich sagen, diese Einflüsse sind so klein, dass man sie vernachlässigen kann, aber sobald man misst, sind sie erstmal da. In der Mathematik ist zwei mal zwei nie vier und ›ein bisschen‹, aber im Experiment kann das anders aussehen. Man macht es ein paar Mal nacheinander und sieht, dass sich die Ergebnisse verändern. Das gilt auch für dynamische Vorgänge wie den Bewegungspfad eines Teilchens, z. B. des Pollenteilchens in der Flüssigkeit. Jedes Mal sieht sein Bewegungspfad anders aus. Solche zufälligen Bewegungen kann man mit stochastischen Differentialgleichungen modellieren. Diese Modellierung ist statistisch, aber in der Mathematik dann ganz exakt, weil die Begriffe genau definiert sind.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die der Zufall generiert, ist ein wohldefiniertes mathematisches Objekt, da hängt kein kleines ungenaues Epsilon dran. Und es trägt zum grundlegenden Verständnis von Experimenten bei, wenn man sieht, ob die Ergebnisse die berühmte Gaußverteilung zeigen, diese schöne Glockenkurve wie auf dem früheren 10 D-Mark-Schein, oder die Verteilung von anderem Typ ist. Etwa in der Finanzmathematik, da musste man feststellen, dass die Risikoverteilung, von der man lange ausgegangen war, falsch war, dass das, was eigentlich unmöglich sein sollte, doch nicht so unmöglich ist. Das kann dann schlimme Folgen haben. Einzuschätzen, wie hoch Unsicherheit ist, ist also sehr wichtig.

Welche Rolle spielen die Naturgesetze in der Stochastik?

Naturgesetze, wie etwa die Newtonschen, sind in einem gewissen Sinne auch unsere Ausgangslage, aber wir sagen dann, wir haben eine Kraft, die auf ein Objekt wirkt und die nicht an jeder Stelle genau bestimmt werden kann, sondern die vielleicht von zufälligen Einflüssen gestört wird. Dann wird aus der Newtongleichung eine stochastische Differentialgleichung. Die berücksichtigt dann sich in der Zeit entwickelnde zufällige Einflüsse. Wir gehen immer von den Naturgesetzen aus und fragen uns dann: wann ist es richtig, die stochastischen Phänomene nicht zu vernachlässigen und sie ins Modell hineinzunehmen? Wann kann ich nicht sicher voraussagen, wie sich ein System entwickelt, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit?

Wie wissen Sie, welches der möglichen Modelle auf die Welt passt?

Letztendlich müssen wir immer in die Empirie gehen. Ich befasse mich vor allem mit der Theorie, ich gehe von gewissen Voraussetzungen aus, die akzeptiert oder in der Theorie festgelegt sind, und versuche, die Theorie weiterzuentwickeln. Aber mich interessiert natürlich sehr, wenn Experimente gemacht werden, um diese Dinge zu prüfen. Als man Einstein sagte, dass seine Allgemeine Relativitätstheorie sich experimentell hundertprozentig bestätigt habe, war er gar nicht überrascht. Er sagte, die Mathematik in seiner Theorie ist so ästhetisch, das musste richtig sein. Manchmal denke ich auch, das haben wir so gut gemacht, wenn wir nichts übersehen haben, müsste man das durch ein Experiment bestätigen können. Allerdings können diese Experimente kompliziert sein. Meine Ergebnisse sind nicht einfach Formeln, in die man dann etwas einsetzt und dann kann man die Lösung ausrechnen. Formeln sind nicht so meine Welt. Wir können nur sagen: es gibt eine Lösung, und sie hat gewisse Eigenschaften. Dann muss die numerische Mathematik dazukommen, um das auszurechnen. Was nicht einfach ist, weil man nicht von vornherein genau sagen kann, wie groß der Fehler bei der numerischen approximativen Berechnung eigentlich ist. Das ist ein Problem, das man zusätzlich lösen muss, damit man weiß, ob es sich lohnt, aufwendige numerische Berechnungen mit dem Computer zu machen. Die Numerik hat auch eine Menge Theorie hinter sich, da muss man mit Leuten zusammenarbeiten, die das hauptberuflich machen.

Erst wird das Bild besser, dann ist es plötzlich weg

Wie könnte das angewandt aussehen?

Hier ist ein Beispiel aus der Bildverarbeitung: Wenn man Bilder hat, die verrauscht sind, etwa Satellitenaufnahmen, oder solche, die vielleicht einen Riss haben, wie ein altes Fresko an einer Wand, das einen Setzriss bekommen hat, kann man das mathematisch beheben. Man nennt das theoretische Bildverarbeitung. Kurz gesagt, lässt man partielle Differenzialgleichungen auf das Bild los. Wenn man die Stochastik vernachlässigt und sich das deterministisch anschaut, hat man zu jeder Zeit ein mathematisches Objekt, keine Zahl, sondern eine Matrix mit tausenden Einträgen zu jedem Zeitpunkt, die beschreiben die Pixel eines Bildes. Diese entwickeln sich dann in der Zeit und man bekommt Matrizen mit neuen Einträgen. Und wenn man die richtigen Gleichungen anwendet, wird das zugehörige Bild dabei glatter, die Risse verschwinden. Die Lösungen der Gleichungen werden glatter, die Extreme werden rausgerechnet. Dabei wird das Bild aber auch im Gesamteindruck unschärfer. Es gibt dann ein zweites Verfahren, das das wieder korrigiert.

Aber es gibt da ein seltsames Phänomen, das sogenannte Extinction-Phänomen. Wenn man die Lösungen der Gleichungen zu immer späteren Zeitpunkten anschaut, wird das Bild immer besser, aber dann ist es plötzlich weg. Alle Einträge der Matrix stehen auf Null und bleiben auf Null. Wir hatten jetzt die Hoffnung, wenn man das stochastisch macht, also mit einer stochastisch gestörten Differentialgleichung, verschwindet das Bild vielleicht nicht. Die Stochastik stört das System ja immer, und man kann sich gar nicht vorstellen, dass das Null bleibt, wenn es einmal Null ist, eben weil es immer wieder zufällig gestört wird. Aber leider mussten wir feststellen, das Bild verschwindet trotzdem. Mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit sind nach einer gewissen Zeit alle Einträge der Matrix Null. Nun wüsste man gerne, wie lange man rechen kann, bevor das passiert, man braucht Schätzzeiten. Aber diese sind sehr schwierig auszurechnen.

Die theoretische Bildverarbeitung war für Sie aber eher ein Ausflug?

Mein Arbeitsgebiet ist vor allem die Strömungsmechanik. Man stelle sich etwa vor, dass eine Flüssigkeit aus lauter Teilchen besteht, die durch den Raum fließen. Dann kann man jedem Punkt im Raum einen Pfeil zuordnen, der die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, das durch diesen Punkt fließt, beschreibt, genauer die Bewegungsrichtung und die Größe der Geschwindigkeit durch seine Länge. Durch dieses Feld von Pfeilen, das sich mit der Zeit dauernd verändert, so wie sich die Strömung der Flüssigkeit verändert, kann man letztere also genau beschreiben, und man kann versuchen, für eine Flüssigkeit all diese Pfeile auszurechnen. Dann bekommt man eine Vorstellung, wie die Flüssigkeit sich in der Zeit bewegt. Dann ist die Frage: wenn ich jetzt weiß, wie die Teilchen fließen, kann ich ausrechnen, wie sie in fünf Stunden fließen werden? Wie sieht dann das Feld von Pfeilen aus? Auf diese Frage gibt es keine Antwort. Man weiß nicht, ob das Ganze ›explodiert‹, ob die Länge der Pfeile zum Beispiel unendlich wird. Das ist ein großes Problem, das das Fields-Institut in den USA zu einem der zehn Millenniumsprobleme der Mathematik erklärt hat. Kein Mensch weiß, ob so ein Strömungsfeld irgendwann einmal schlimme Dinge macht. Man kann zeigen, dass abhängig von der Länge der Pfeile zum jetzigen Zeitpunkt für eine gewisse Zeitspanne nichts Dramatisches passiert. Mich interessiert, im stochastischen Fall zu beweisen, dass es eine eindeutige Lösung für das Pfeilfeld gibt, die nie explodiert. Allerdings ist das im stochastischen Fall kein Millenniumsproblem. Es klingt vielleicht seltsam, aber das Problem wird durch eine stochastische Beschreibung ein bisschen einfacher. Wenn man eindeutig zeigen kann, dass im stochastischen Fall nichts passiert, kann man sicher sein, dass es in der Realität mit hoher Wahrscheinlichkeit auch keine Katastrophen gibt.

Der Fluss bleibt wahrscheinlich in seinem Bett

Sie wollen beweisen, dass ein Fluss auch in ferner Zukunft nicht aus seinem Bett springt? Ist das nicht ein sehr theoretisches Problem?

Nein, ich glaube, dass die Physiker und die Mathematiker da ein echtes Problem in der Strömungsmechanik haben. Das gleiche Modell beschreibt ja auch Luftströmungen und ist verbunden mit dem Problem der Turbulenz, etwa für Flugzeuge. Natürlich haben die Physiker recht, wenn sie sagen: falls das vielleicht in zehntausend Jahren explodiert, interessiert mich das für den Moment nicht. Aber für die Mathematiker ist das interessant. Gibt es eine generische Eigenschaft, die dahintersteht? Da sagen die Mathematiker: wenn wir etwa das Phänomen der Turbulenzen nicht genau verstehen, kann auch in der Anwendung wer weiß was geschehen. Es gibt etwa Überlegungen, die Whiglets an den Flügelspitzen der Flugzeuge beweglich zu machen, um auf Luftturbulenzen beim Fliegen direkt reagieren zu können, eben weil man theoretisch nicht genau Bescheid weiß.

Was bedeutet Verstehen in der Stochastik?

Man muss unterscheiden: das eine ist, die Mathematik zu verstehen, das andere ist, das Modell zu verstehen. Vielleicht ist die Mathematik in Ordnung, aber nicht für das Modell geeignet. Beides sind Arten von Verstehen. Verstehen heißt in der Modellierung, Zusammenhänge begreifen, sehen, welche Einflüsse dominant sind, welche nicht, und das in einer mathematischen

Gleichung aufzuschreiben. Diese gibt dann genau wieder, was wichtig ist, und Unwichtiges wird konsequent weggelassen. Dann beginnt die theoretische Arbeit und man schließt rein mathematisch weiter: gibt es eine Lösung, gibt es mehrere oder gar keine? Was sind ihre Eigenschaften? Man muss sich aber klar machen, dass man in seinem Modell nur ein Abbild der Natur gemacht hat, das man immer hinsichtlich seiner Richtigkeit kritisch hinterfragen und möglicherweise ändern oder anpassen muss. Und dann geht es wieder rein mathematisch weiter. Diese beiden Komponenten, Modellierung und exakte mathematische Analyse, sind säuberlich zu trennen, sonst ist eine Fehleranalyse bei widersprüchlichen Ergebnissen unmöglich.

Das heißt, mit der Mathematik ist es wie mit der Sprache, wir können uns verständigen, aber sie passt immer nur so einigermaßen auf die Welt?

Das ›passend machen‹ auf die jeweilige Situation ist Teil der mathematischen Forschung. Es ist schon faszinierend, dass die Menschheit so weit gekommen ist, diesen Schritt von der Realität in die Fiktion zu machen. Zum Beispiel einen Punkt, das heißt, ein Objekt ohne Ausdehnung, also etwas unendlich (›infinitesimal‹) Kleines in die Theorie einzubeziehen und dann damit konsequent weiterzuarbeiten. Komplexe Schlussweisen genau zu formulieren, sodass sie wirklich ein mathematischer Beweis werden, keine Argumentation, die überredet, wie Sokrates den Sophisten unterstellt, sondern ein Beweis, der überzeugt, der nicht nur mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit richtig ist, sondern formal beweisbar richtig, da gibt es keine Meinungen, das ist entweder richtig oder falsch. Dass man sich in der Entwicklung der Naturbeschreibung darauf eingelassen hat, das ist faszinierend.

Lottozahlen und Fußballergebnisse

Der Mensch wird im Alltag immer häufiger mit Wahrscheinlichkeitsaussagen und -urteilen konfrontiert. Gilt das auch für die Wissenschaften?

Die Statistik geht immer mehr ins Denken ein, es wird viel darüber geredet, im Alltag und in den Wissenschaften, nicht nur in den Naturwissenschaften. Man akzeptiert, dass die Stochastik ins Modell gehört. Nur ist es meist so, dass man dann eine Gleichverteilung annimmt, das heißt, dass alle zufälligen Einflüsse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Wie beim Würfeln. Das ist einfacher zu rechnen und dann vernünftig, wenn man keine zusätzlichen Annahmen machen kann. Aber für den Wahrscheinlichkeitstheoretiker ist das die schlimmste Verteilung, weil man *a priori* keine Informationen hat. Sobald man weiß, dies ist wahrscheinlicher als das, wie bei der Gaußverteilung, steht man besser da. Es ist manchmal schwer, den Forschern außerhalb der Mathematik klar zu machen, dass sie die zusätzlichen Informationen, die sie haben, auch bei zufälligen Einflüssen benutzen sollten, auch wenn dann die Mathematik viel schwieriger wird. Mit der Gleichverteilung wirft man Informationen weg. Und in vielen Situationen sind wir mit unserem Wissen über den Zufall in einer speziellen Situation gar nicht so schlecht dran, dass man die Gleichverteilung annehmen müsste.

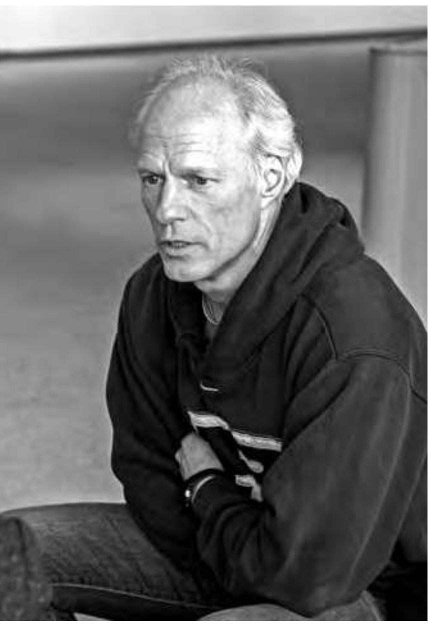
Werden Sie auch nach den Lottozahlen gefragt?

Nach Lottozahlen und nach zukünftigen Fußballergebnissen. Oft kommen auch Bekannte zu mir und fragen: Wie soll ich denn jetzt entscheiden, ich weiß nicht so recht, was auf mich zukommt, etwa wenn es darum geht, Aktien zu kaufen. Das sind natürlich sehr heikle Fragen. Gerade in der Finanzmathematik gehen viele Modelle davon aus, dass man ein faires Spiel spielt mit dem Gegenüber. Und faire Spiele sind für keinen der Spieler voraussagbar, sonst wären sie nicht fair. Das machen sich viele nicht klar. Es gibt aber auch einfachere Dinge: Wenn ich den Zug nehme, wann muss ich losfahren, um auf jeden Fall pünktlich anzukommen? Ich fahre immer genau einen Zug früher. Angenommen, dieser eine Zug fällt völlig aus: dass zwei hintereinander ausfallen, ist sehr unwahrscheinlich. Wenn man den Zufall ›zähmen‹ will, muss man solche Überlegungen anstellen.

Für die Schule oft zu schwierig

Sollten die Kinder in der Schule mehr Statistik lernen?

Darüber gibt es gerade eine große Diskussion. Ich bin ja gerade Vizepräsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), wo auch zurzeit über Schulstandards diskutiert wird. Es gibt neue Vorschläge, ein Curriculum zu machen, in dem die Stochastik gar nicht mehr vorkommt – und meine Kollegen waren sehr erstaunt, dass ich gar nicht so sehr dagegen bin, die Stochastik im Schulstoff zurückzufahren. Sie ganz herauszunehmen wäre sicher erheblich übertrieben. Die Stochastikbücher in der Schule sind teilweise miserabel. Das liegt nicht an der Inkompetenz der Autoren, sondern daran, dass man versucht, die Theorie auf das Niveau der Schule herunterzubrechen und dabei die falschen Dinge weglässt. Dabei gerät dann manches völlig durcheinander. Die Schüler verstehen dann teilweise gar nicht mehr und können nicht mehr verstehen, worum es geht. Dazu braucht man zu viel komplizierte Mathematik. Stattdessen wird dann gesagt: das müsst ihr jetzt einfach mal glauben und es anwenden, dann seht ihr, dass es klappt. Und die Schüler gehen mit so einem unsicheren Gefühl aus dem Unterricht: das ist irgendwelcher Zauber, das habe ich nicht verstanden, und das werde ich nie verstehen. Das ist nicht gut. Dann bekommen die Schüler kein natürliches Verhältnis zu einer solchen natürlichen Sache wie Wahrscheinlichkeit. Es ist nicht gut, wenn man in der Schule so komplizierte Sachen macht, dass man sie geradezu verfälschen muss, damit die Schüler sie verstehen. Dann sollte man es lassen. Aber den Zufall kennenzulernen, an Modellen zu erfahren, was Wahrscheinlichkeit ist, eine Vorstellung davon zu bekommen, was es heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, im Lotto zu gewinnen bei 1 zu ca. 14 Millionen liegt; dass die Ziehung 1, 2, 3, 4, 5, 6 genauso wahrscheinlich ist wie jede andere; was in einer Situation passieren kann und was man tun muss, damit die Wahrscheinlichkeit möglichst hoch ist, dass das passiert, was man möchte: das ist wichtig und prägt das Denken.



Kommen eigentlich die Physiker zu den Mathematikern, wenn sie etwas berechnen möchten, oder macht die Mathematik erst die Physik möglich?

Meistens sind die Physiker schneller als die Mathematiker, sie sind ja meistens auch gute Mathematiker, und die Mathematiker laufen mit ihren Theorien hinterher. Aber manchmal ist auch die Mathematik schneller. Einstein hätte seine Relativitätstheorie nicht formulieren können, wenn Riemann nicht schon 50 Jahre vorher die Differentialgeometrie abstrakt entwickelt hätte. Und ohne die Relativitätstheorie hätten wir heute ein ungenaues GPS. Das macht bei den Signalen, die vom Satelliten kommen, so viele Meter aus, dass man schon mal seine Abfahrt verpassen kann. Daran hat Riemann natürlich nie gedacht. Mancher hat vermutlich damals seine Forschung randständig gehalten, und heute hätte er bestimmt keine Fördergelder bekommen.

Was schließen Sie daraus für die Verteilung der Fördergelder?

Dass es nicht gut ist, nur die hippen Sachen zu unterstützen, weil das gerade so spannend klingt. Man muss auch die Leute fördern, die tief denken und in der Mathematik das machen, was sie persönlich für wichtig und interessant halten. Auch wenn man das heute als randständig ansieht. Wenn man das jetzt alles ausradiert, wird man viele ›Riemanns‹ verlieren. Vor allem, wenn diese Riesensummen verteilt werden, wie jetzt in der Exzellenzinitiative, dann will natürlich auch die Politik spannende Sachen sehen. Wenn dann Leute nur da sitzen wollen, alleine oder in einer kleinen Gruppe, um sich etwas tief zu überlegen, sieht das vielleicht nicht so aufregend aus. Aber man muss ihnen die Freiheit geben, Sachen zu machen, die nicht Mainstream sind. Natürlich kann man die Leute ruhig etwas unter Druck setzen, dass sie sich überlegen, ob das langfristig Sinn macht und Nutzen bringt, was sie da tun. Aber ein Wissenschaftler schafft eben in erster Linie Wissen und dann erst Nutzen. Man sollte also einen Teil der Forschungsgelder auch für solche ›abenteuerlichen‹ Projekte zur Seite legen. Denn manchmal sind die modischen Themen nach ein paar Jahren vorbei und, wenn man dann genau schaut, was sie eigentlich gebracht haben, ist es nicht selten fraglich, ob man sie so hätte fördern sollen. Ein bisschen Science Fiction muss schon sein, aber man muss eine gute Balance finden. Da ist viel Politik dabei – und viel Stochastik.

Vielen Dank für das Gespräch!