



Music Algebra: from the Scale Vectors to the Modal Tensor - Algebra Musicale: dai Vettori Scala al Tensore Modale

Authors: Carmine Cataldo
Submitted: 30. January 2018
Published: 31. January 2018
Volume: 5
Issue: 1
Affiliation: Independent Researcher, Jazz Pianist and Composer, PhD in Mechanical Engineering, Battipaglia (SA), Italy
Languages: Italian
Keywords: Algebra Musicale, Vettori scala, Matrici, Tensore Modale, Base Standard, Prodotto Scalare - Music Algebra, Scale Vectors, Matrices, Modal Tensor, Standard Basis, Dot Product
DOI: 10.17160/josha.5.1.383

JOSHA

josha.org

**Journal of Science,
Humanities and Arts**

JOSHA is a service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content

Algebra Musicale: dai Vettori Scala al Tensore Modale

Carmine Cataldo

Jazz Pianist and Composer, PhD in Mechanical Engineering, Battipaglia (SA), Italy

Email: catcataldo@hotmail.it

Abstract (English)

This article represents a translated and revised version of the paper "A Simplified Introduction to Music Algebra: from the Scale Vectors to the Modal Tensor". In this paper we take a step forward towards the attainment of a formalism that allows to establish a deeper connection between Music and Algebra. Starting from the writing of the Ionian Scale as a Vector, we define the Ionian Modal Tensor. We prove that all the Scales that derive from the Ionian Mode, as well as all the corresponding Seventh Chords, herein considered as being Scalars, can be obtained from the above-mentioned Tensor by resorting to the concepts of Standard Basis and Dot Product. Moreover, by opportunely summing the Vectors of the Standard Basis to each other, we define some Fundamental Vectors such as the "Monk – Powell" Vector and the "Guide Notes" one.

Keywords (English)

Music Algebra, Scale Vectors, Matrices, Modal Tensor, Standard Basis, Dot Product.

Abstract

Quest'articolo costituisce un passo avanti verso l'ottenimento di un formalismo che consenta di stabilire una connessione più profonda tra Musica e Algebra. Partendo dalla scrittura della Scala Ionica in forma vettoriale, si perviene alla definizione del Tensore Modale Ionico. Si dimostra come tutti i Modi derivanti da quello Ionico, così come i corrispondenti Accordi di Settima, in questa sede trattati alla guisa di scalari, possano essere ottenuti dal Tensore di cui sopra ricorrendo ai concetti di Base Standard e Prodotto Scalare. Inoltre, sommando opportunamente tra di loro i vettori della Base Standard, vengono agevolmente dedotti alcuni vettori fondamentali quali il "Monk – Powell" e quello delle "Note Guida".

Keywords

Algebra Musicale, Vettori scala, Matrici, Tensore Modale, Base Standard, Prodotto Scalare.

1. BREVE INTRODUZIONE

Inizieremo dalla definizione della Scala Ionica in forma vettoriale. Le *componenti* del *vettore* che andremo a costruire consisteranno, assai banalmente, nei *gradi della scala*. La stessa procedura, naturalmente, è applicabile alla totalità delle scale derivanti da quella *Ionica*. Successivamente, definiremo il *Tensore Modale Ionico*: da quest'ultimo, sfruttando le nozioni di *Base Standard* e *Prodotto Scalare*, verrà agevolmente dedotto il *Vettore degli Accordi di Settima*. Com'è facile intendere, una ragionevole comprensione della trattazione richiede il possesso di una padronanza minima dei concetti fondamentali relativi ai *Vettori* e alle *Matrici*.

2. SCALE IN FORMA DI VETTORI

Se indichiamo X una generica *nota* appartenente alla *scala Cromatica*, e con t un *intervallo* pari ad un *tono intero* [1] [2], possiamo rappresentare la *scala Ionica* in *forma vettoriale*:

$$\mathbf{s}^{Ion}(X) = \left(X, X + t, X + 2t, X + \frac{5}{2}t, X + \frac{7}{2}t, X + \frac{9}{2}t, X + \frac{11}{2}t \right) \quad (1)$$

Ad esempio, ponendo $X = C$, dalla (1) otteniamo:

$$\mathbf{s}^{Ion}(C) = (C, D, E, F, G, A, B) \quad (2)$$

Naturalmente, qualsiasi scala può essere rappresentata in forma vettoriale. A tal proposito, consideriamo la totalità delle scale deducibili da quella *Ionica* (*Dorica*, *Frigia*, *Lidia*, *Misolidia*, *Eolica*, *Locria*) [3] [4]. Tenendo a mente l'*armonizzazione* della *Ionica*, indicando con $\mathbf{s}^{Ion,n}$ il *vettore scala* derivato dall'*n-esimo grado* della *scala Ionica* (n rappresenta un *intero positivo* il cui valore è compreso tra 1 e 7), possiamo scrivere, con ovvio significato della notazione, quanto segue:

$$\mathbf{s}^{Ion,1}(X) = \mathbf{s}^{Ion}(Y) \quad Y = X \quad (3)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,2}(X) = \mathbf{s}^{Dor}(Y) \quad Y = X + t \quad (4)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,3}(X) = \mathbf{s}^{Phr}(Y) \quad Y = X + 2t \quad (5)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,4}(X) = \mathbf{s}^{Lyd}(Y) \quad Y = X + \frac{5}{2}t \quad (6)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,5}(X) = \mathbf{s}^{Mix}(Y) \quad Y = X + \frac{7}{2}t \quad (7)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,6}(X) = \mathbf{s}^{Aeo}(Y) \quad Y = X + \frac{9}{2}t \quad (8)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,7}(X) = \mathbf{s}^{Loc}(Y) \quad Y = X + \frac{11}{2}t \quad (9)$$

È chiaramente contemplabile l'applicazione della procedura inversa: in altri termini, possiamo selezionare un *modo* (tra quelli finora considerati) e determinare la *scala Ionica* dalla quale il suddetto deriva (se selezioniamo un *modo* ed impostiamo Y , possiamo determinare X). Ad esempio, siccome il *modo Dorico* scaturisce dal *secondo grado* della *scala Ionica* [3] [4] [5] [6] [7], possiamo immediatamente scrivere, in virtù della (4), quanto segue:

$$\mathbf{s}^{Dor}(Y) = \mathbf{s}^{Ion,2}(X) \quad X = Y - t \quad (10)$$

Ponendo $X = C$, da (3), (4), (5), (6), (7), (8) e (9) otteniamo, rispettivamente:

$$\mathbf{s}^{Ion,1}(C) = \mathbf{s}^{Ion}(C) = (C, D, E, F, G, A, B) \quad (11)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,2}(C) = \mathbf{s}^{Dor}(D) = (D, E, F, G, A, B, C) \quad (12)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,3}(C) = \mathbf{s}^{Phr}(E) = (E, F, G, A, B, C, D) \quad (13)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,4}(C) = \mathbf{s}^{Lyd}(F) = (F, G, A, B, C, D, E) \quad (14)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,5}(C) = \mathbf{s}^{Mix}(G) = (G, A, B, C, D, E, F) \quad (15)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,6}(C) = \mathbf{s}^{Aeo}(A) = (A, B, C, D, E, F, G) \quad (16)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,7}(C) = \mathbf{s}^{Loc}(B) = (B, C, D, E, F, G, A) \quad (17)$$

3. IL TENSORE MODALE

Prendendo in considerazione (11), (12), (13), (14), (15), (16) e (17), otteniamo una *matrice di note* in cui *righe* e *colonne* rappresentano nulla più che i *vettori scala* derivati dal *modo Ionico*:

$$\mathbf{M}^{Ion}(C) = \begin{bmatrix} C & D & E & F & G & A & B \\ D & E & F & G & A & B & C \\ E & F & G & A & B & C & D \\ F & G & A & B & C & D & E \\ G & A & B & C & D & E & F \\ A & B & C & D & E & F & G \\ B & C & D & E & F & G & A \end{bmatrix} \quad (18)$$

La suddetta matrice rappresenta il *tensore modale Ionico*, indicato con \mathbf{M}^{Ion} . Sottolineiamo che " \mathbf{M} " è scritto in grassetto, siccome non indica uno *scalare*, e in maiuscolo, al fine di creare una distinzione tra *tensori* e *vettori*, quest'ultimi indicati, in questa sede, adoperando caratteri minuscoli. Il *tensore modale Ionico* è *simmetrico*: pertanto, con ovvio significato della notazione, abbiamo:

$$M_{ij}^{Ion} = M_{ji}^{Ion} \quad (19)$$

Di conseguenza, se denotiamo, ancora una volta, con $\mathbf{s}^{Ion,n}$ il vettore scala derivato dall'*n-esimo grado* della *scala Ionica*, possiamo evidentemente scrivere:

$$\mathbf{s}^{Ion,n} = (M_{n1}^{Ion}, M_{n2}^{Ion}, M_{n3}^{Ion}, M_{n4}^{Ion}, M_{n5}^{Ion}, M_{n6}^{Ion}, M_{n7}^{Ion}) \quad (20)$$

$$\mathbf{s}^{Ion,n} = (M_{1n}^{Ion}, M_{2n}^{Ion}, M_{3n}^{Ion}, M_{4n}^{Ion}, M_{5n}^{Ion}, M_{6n}^{Ion}, M_{7n}^{Ion}) \quad (21)$$

Consideriamo adesso la *base standard* dello spazio *Euclideo* a 7 dimensioni (\mathcal{R}^7):

$$\mathbf{d}^1 = (1,0,0,0,0,0,0) \quad (22)$$

$$\mathbf{d}^2 = (0,1,0,0,0,0,0) \quad (23)$$

$$\mathbf{d}^3 = (0,0,1,0,0,0,0) \quad (24)$$

$$\mathbf{d}^4 = (0,0,0,1,0,0,0) \quad (25)$$

$$\mathbf{d}^5 = (0,0,0,0,1,0,0) \quad (26)$$

$$\mathbf{d}^6 = (0,0,0,0,0,1,0) \quad (27)$$

$$\mathbf{d}^7 = (0,0,0,0,0,0,1) \quad (28)$$

La *base standard* è costituita da sette *vettori fondamentali*. Evidentemente, ogni vettore fondamentale è caratterizzato dall'aver tutte le *componenti* nulle, tranne quella specificata dall'*apice*, uguale ad 1.

A questo punto, è agevole comprendere come un generico *vettore scala* $\mathbf{s}^{lon,n}$ possa essere ottenuto a mezzo del prodotto scalare tra il *tensore modale* e l'*n-ennesimo vettore fondamentale*:

$$\mathbf{s}^{lon,n}(X) = \mathbf{M}^{lon}(X) \cdot \mathbf{d}^n \quad (29)$$

Ad esempio, considerando (5) e (29), abbiamo:

$$\mathbf{s}^{Phr}(Y) = \mathbf{s}^{lon,3}(X) = \mathbf{M}^{lon}(X) \cdot \mathbf{d}^3 \quad Y = X + 2t \quad (30)$$

Dalla (30), ponendo $X = C$, otteniamo immediatamente:

$$\mathbf{s}^{Phr}(E) = \mathbf{s}^{lon,3}(C) = \mathbf{M}^{lon}(C) \cdot \mathbf{d}^3 \quad (31)$$

$$\mathbf{s}^{Phr}(E) = \begin{bmatrix} C & D & E & F & G & A & B \\ D & E & F & G & A & B & C \\ E & F & G & A & B & C & D \\ F & G & A & B & C & D & E \\ G & A & B & C & D & E & F \\ A & B & C & D & E & F & G \\ B & C & D & E & F & G & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \\ A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad (32)$$

Ovviamente, i *vettori fondamentali* possono essere tra di loro sommati. Coerentemente con la notazione in questa sede adoperata, i vettori ottenuti saranno caratterizzati dall'aver apici che riveleranno la posizione delle componenti non nulle (uguali ad 1).

$$\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^7 = \mathbf{d}^{17} = (1,0,0,0,0,0,1) \quad (33)$$

$$\mathbf{d}^3 + \mathbf{d}^7 = \mathbf{d}^{37} = (0,0,1,0,0,0,1) \quad (34)$$

$$\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^3 + \mathbf{d}^5 = \mathbf{d}^{135} = (1,0,1,0,1,0,0) \quad (35)$$

$$\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^3 + \mathbf{d}^5 + \mathbf{d}^7 = \mathbf{d}^{1357} = (1,0,1,0,1,0,1) \quad (36)$$

Possiamo assegnare un nome ai vettori appena ottenuti. Assai intuitivamente, \mathbf{d}^{17} può essere denominato *vettore fondamentale* "Monk-Powell" (siccome sia *Thelonious Monk* [8] [9] che *Bud Powell* [10] [11] erano soliti suonare, con la mano sinistra, *diadi* costituite dalla *tonica* e dalla *settima* dell'accordo), \mathbf{d}^{37} *vettore fondamentale* delle "note guida", \mathbf{d}^{135} *vettore fondamentale* delle *triadi*, \mathbf{d}^{1357} *vettore fondamentale* degli accordi di *settima*.

In particolare, il vettore \mathbf{d}^{1357} può essere sfruttato per ricavare *accordi di settima* (considerati *scalari*) dalle *scales*, ricorrendo, ancora una volta, al *prodotto scalare*. Se $\mathbf{s}^{lon,n}(X)$ è il *vettore* che rappresenta il *modo* derivato dall'*n-esimo grado* della *scala Ionica* di X , il corrispondente *accordo di settima* può essere immediatamente ottenuto, con ovvio significato della notazione, come segue:

$$c^{lon,n}(X) = \mathbf{s}^{lon,n}(X) \cdot \mathbf{d}^{1357} = \sum_{i=1}^7 s_i^{lon,n}(X) d_i^{1357} \quad (37)$$

Ad esempio, tenendo in considerazione (6) e (37), abbiamo:

$$c^{Lyd}(Y) = \mathbf{c}^{lon,4}(X) = \mathbf{s}^{lon,4}(X) \cdot \mathbf{d}^{1357} \quad Y = X + \frac{5}{2}t \quad (38)$$

Dalla (38), ponendo $X = C$, otteniamo:

$$c^{Lyd}(F) = \mathbf{s}^{lon,4}(C) \cdot \mathbf{d}^{1357} = F + A + C + E = Fmaj7 \quad (39)$$

Com'è facile intendere, possiamo anche considerare *vettori* le cui *componenti* sono *accordi*. A tal proposito, denotiamo con $\mathbf{h}^{lon}(X)$ il *vettore* le cui *componenti* non sono altro che gli *accordi di settima* che scaturiscono, ordinatamente, dall'*armonizzazione* della *scala Ionica* di X . È agevole verificare come il suddetto vettore possa essere banalmente ottenuto nel modo seguente:

$$\mathbf{h}^{lon}(X) = \mathbf{M}^{lon}(X) \cdot \mathbf{d}^{1357} \quad (40)$$

Dall'identità precedente, ponendo, ancora una volta, $X = C$, otteniamo istantaneamente:

$$\mathbf{h}^{lon}(C) = \mathbf{M}^{lon}(C) \cdot \mathbf{d}^{1357} \quad (41)$$

Più esplicitamente, dalla (41) possiamo scrivere:

$$\mathbf{h}^{lon}(C) = \begin{bmatrix} C & D & E & F & G & A & B & 1 \\ D & E & F & G & A & B & C & 0 \\ E & F & G & A & B & C & D & 1 \\ F & G & A & B & C & D & E & 0 \\ G & A & B & C & D & E & F & 1 \\ A & B & C & D & E & F & G & 0 \\ B & C & D & E & F & G & A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cmaj7 \\ Dm7 \\ Em7 \\ Fmaj7 \\ G7 \\ Am7 \\ B\emptyset \end{bmatrix} \quad (42)$$

4. OSSERVAZIONI FINALI

Sebbene l'approccio in questa sede brevemente descritto possa essere considerato, al meno in certa misura, concretamente innovativo, è doveroso sottolineare, per onestà, come la rappresentazione delle *scales* in *forma vettoriale* (*Pitch-Class Set*) costituisca tutto fuorchè una novità. [12] [13] Ad esempio, La *scala Ionica* può essere alternativamente descritta come segue:

$$s^{lon} = \{0,2,4,5,7,9,11\} \quad (43)$$

Gli *elementi del set* (le componenti del vettore) rappresentano la *distanza* tra i *gradi della scala* (dal primo al settimo) e la *tonica*: il primo è nullo, siccome la *distanza* tra la *tonica* e sé stessa è uguale a zero, il secondo è uguale a 2, siccome la *distanza* tra la *sopratonica* e la *tonica* è uguale a 2 *semitoni*, il terzo è uguale a 4, siccome la *distanza* tra la *mediante* e la *tonica* è uguale a 4 *semitoni*, e così via. In ultimo, evidenziamo come la linea di ragionamento in questa sede presentata possa essere agevolmente applicata a qualsivoglia scala *epta fonica*: considerando, ad esempio, la *scala Ipoionica*, è possibile ottenere il corrispondente *tensore modale* M^{lpo} nonché il *vettore armonizzazione* h^{lpo} .

RINGRAZIAMENTI

Quest'articolo è dedicato a mia madre, Giuseppina, che mi ha sempre incoraggiato a studiare il piano con passione e devozione. Ringrazio Francesco D'Errico, Giulio Martino, e Sandro Deidda, eccellenti jazzisti italiani e stimati docenti presso il Conservatorio di Salerno, per i preziosi suggerimenti.

REFERENCES

- [1] Cataldo, C. (2018). Towards a Music Algebra: Fundamental Harmonic Substitutions in Jazz. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science (IJAERS)*, 5(1), 52-57. <https://dx.doi.org/10.22161/ijaers.5.1.9>
- [2] Cataldo, C. (2018). Jazz e Sostituzioni Armoniche: Verso un Nuovo Formalismo - Jazz and Harmonic Substitutions: Towards a New Formalism. *Journal of Science, Humanities and Arts (JOSHA)*, 5(1). <https://dx.doi.org/10.17160/josha.5.1.381>
- [3] D'Errico, F. (2017). *Armonia Funzionale e Modalità – Rudimenti per l'Improvvisazione a Indirizzo Jazzistico*. Naples, Italy: Editoriale Scientifica.
- [4] Levine, M. (2009). *The Jazz Theory Book (Italian Edition by F. Jegher)*. Milan, IT: Curci Jazz.
- [5] Lawn, R., Hellmer, J. (1996). *Jazz: Theory and Practice*. Los Angeles, CA: Alfred Pub. Co. Inc.
- [6] Cho, G. J. (1992). *Theories and Practice of Harmonic Analysis*. Lewiston, NY: E. Mellen Press.
- [7] Coker, J., Casale, J., & Campbell, G. (1982). *Patterns for Jazz – A Theory Text for Jazz Composition and Improvisation: Treble Clef Instruments*. Los Angeles, CA: Alfred Pub. Co. Inc.
- [8] Monk, T. (2006). *Thelonious Monk Collection: Piano Transcriptions (Artist Transcriptions)*. Milwaukee, WI: Hal ·Leonard.
- [9] Monk, T. (2006). *The Best of Thelonious Monk: Piano Transcriptions (Artist Transcriptions)*. Milwaukee, WI: Hal ·Leonard.
- [10] Powell, B. (2002). *The Bud Powell Collection: Piano Transcriptions (Artist Transcriptions)*. Milwaukee, WI: Hal ·Leonard
- [11] Powell, B. (1998). *Bud Powell Classics (Artist Transcript.)*. Milwaukee, WI: Hal ·Leonard.
- [12] Schuijjer, M. (2008). *Analyzing Atonal Music: Pitch-Class Set Theory and Its Contexts*. University of Rochester. [ISBN 978-1-58046-270-9]
- [13] Lewin, D. (1960). The Intervallic Content of a Collection of Notes, Intervallic Relations between a Collection of Notes and its Complement: an Application to Schoenberg's Hexachordal Pieces. *Journal of Music Theory*, 4(1), 98-101.

**Author Info****Carmine Cataldo**

Independent Researcher, Battipaglia (SA), Italy

PhD in Mechanical Engineering

Jazz Pianist and Composer

Art Director and Resident Pianist at "Bar Capri", Battipaglia (SA), Italy

Email: catcataldo@hotmail.it**ResearchGate Profile:** https://www.researchgate.net/profile/Carmine_Cataldo

Carmine Cataldo was born on 13 February 1979 in Battipaglia (Salerno - Italy).

In 2004, he graduates from the University of Salerno in Mechanical Engineering; the same year, he passes the qualifying examination to the Engineers Register. In 2008, he obtains, from the University of Salerno, a PhD in Mechanical Engineering, with a final dissertation based upon the analytical modelling of the extrusion and stretching processes targeted at thermoplastic polymers.

During PhD research work, he mainly focuses on heat treating of steels and iron based alloys, mechanical characterization of unconventional and composite materials, innovative technologies for welded and glued joints, treatments finalized to increase the surface tension of polymeric films, the application of fuzzy logic in order to adjust the extrusion die during the film casting process and rapid prototyping by laser sintering. Currently, he is particularly interested in alternative cosmology and special relativity. His main interest lies in the attempt to preserve the validity of notions, considered as outdated, by assigning a different meaning, coherently with the phenomenological reality, to equations usually classified as relativistic. He is a member of the editorial board of the journals "Research and Reviews: Journal of Pure and Applied Physics" and "Advances in Laser Optics and Photonics".

Carmine Cataldo is also a jazz pianist and composer.

He has been resident pianist and art director at music club "Bar Capri", in Battipaglia (Italy), since 2004. In 2002 he ranks first in the International Jazz Competition "Baronissi Jazz Festival" (Emerging Musicians Category); moreover, he is appointed best young talent in the competition and awarded a scholarship for the Berklee Summer School at Umbria Jazz 2003. During the Berklee Clinics he studies Piano Improvisation (advanced level) with Russell Hoffmann, Ensemble Music with the guitarist Jim Kelly, Improvisation Techniques with the saxophonist Greg Badolato, Be-Bop Language with the trumpeter Jeff Stout, and attends special lectures with the renowned singer Bobby McFerrin and the legendary drummer Elvin Jones. In 2003 he ranks first in the International Jazz Competition "Baronissi Jazz Festival" (Professional Musicians Category). He has had the privilege of sharing the stage with several worldwide esteemed jazz musicians, such as Avishai Cohen (Baronissi Jazz Festival 2004), Stefano Bollani and Enrico Rava (Jazz Castello Lagopesole, 11th Edition). As a jazz pianist, he has cooperated with artists of the calibre of Alfonso Deidda, Antonio Onorato, Carla Marciano, Daniele Scannapieco, Giulio Martino, Jerry Popolo, Max Ionata, Pietro Condorelli, Sandro Deidda.

Carmine Cataldo is also a martial arts teacher.

He is appointed "Shifu" by his own master, Sifu Antonello Parisi (ITKAA), on 18 December 2016. He is a Black Belt in Shaolin Wing Chun (Superior Instructor, 4th Technical Level) and Combat Escrima Concept (Advanced Instructor, 3rd Technical Level). He has attended several seminars with renowned martial artists of the calibre of Grand Master Renè Latosa (Escrima Concepts), Sifu Maria Gröthe (Siu Lam Weng Chun), Sifu Lin Xiang Fuk (Black Flag – Hek Ki Boen Eng Chun), Master Marco Mattioni (Escrima and Wing Tsun), Master Aldo Chiari (Muay Thai Boran).